SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 177

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}$ მაქსიმალური მნიშვნელობა და $a+b+c=1$,

ჩემი აზრით გამოსახულების მაქსიმალური იქნება როცა $a=b=0$ და $c=1$ და შესაბამისად

ტოლი იქნება $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8+5}{20}=\frac{13}{20}$. ესაა დასამტკიცებელი.

$a^2-2a+5=x \Rightarrow (a-1)^2+4=x \Rightarrow (a-1)^2=x-4 \quad a-1=\sqrt{x-4} \Rightarrow a=\sqrt{x-4}+1$.

ანალოგიურად

$b^2-2b+5=y \Rightarrow b=1-\sqrt{y-4}$.

$c^2-2c+5=z \Rightarrow b=1-\sqrt{z-4}$

ეს $\frac{1}{x}$ ... ყველა გავჭრათ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ -ის მაქსიმალური მნიშვნელობა და ვნახოთ

როცა $\sqrt{x-4}+\sqrt{y-4}+\sqrt{z-4}=2 \quad \sqrt{x-4}+\sqrt{y-4}=2-\sqrt{z-4}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

**შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი**

**შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის**

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 177

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}$ მინიმალური მნიშვნელობა თუ $a+b+c=1$,

ჩვენი აზრით გამოსახულების მინიმალური იქნება როცა $a=b=0$ და $c=1$ და მაშინ

ესე იქნება $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8+5}{20}=\frac{13}{20}$. ეს დავამტკიცოთ.

$a^2-2a+5=x \Rightarrow (a-1)^2+4=x \Rightarrow (a-1)^2=x-4 \quad a-1=\sqrt{x-4} \Rightarrow a=\sqrt{x-4}+1$.

ანალოგიურად

$b^2-2b+5=y \Rightarrow b=1-\sqrt{y-4}$.

$c^2-2c+5=z \Rightarrow c=1-\sqrt{z-4}$

ეს $\frac{1}{x}$ ფუნქცია $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$-ის მინიმალური მნიშვნელობა თუ ვიცით

როცა $\sqrt{x-4}+\sqrt{y-4}+\sqrt{z-4}=2 \quad \sqrt{x-4}+\sqrt{y-4}=2-\sqrt{z-4}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 177

ამოცანა № 4

გვერდი № 1.

$f(x)=0$ [illegible] $f(x)\neq 0$.

$f: R \Rightarrow R$. $f(x+y f(x)) = f(f(x)) + x f(y)$

ჩავსვათ $x=0$.

$f(y f(0)) = f(f(0))$

$f(0)=d$ $\quad f(y \cdot d) = f(d)$

[illegible] $f(d)$ [illegible] $(d)$ [illegible] თუ $d \neq 0$ [illegible]

~~[illegible]~~ [illegible] $R$ [illegible] $y = \frac{x}{d}$ [illegible]

[illegible] $x$-ისთვის $f(x)=d$ ჩავსვათ

[illegible] $\Rightarrow$ $f \cdot d = d+d \Rightarrow d=0$ ანუ [illegible] $d=0$ ანუ $f(0)=0$

ჩავსვათ $y=0$. $\quad f(x) = f(f(x)) + x \cdot f(0) = f(f(x))$

ანუ ნებისმიერი $x$-ისთვის $f(x)=f(f(x))$ [illegible] $x$-[illegible]

[illegible] $f(x)=d$ $\quad d=f(d) \Rightarrow$ [illegible] $f(x)$ [illegible]

[illegible] $f(x)=x$ [illegible]

$f(x)$-[illegible]

დავუშვათ [illegible] $a$ და $b$-სთვის $f(a)=f(b)$ და $a \neq b$.

ჩავსვათ $x=a$ $\; y=b$.

$f(a+b \cdot f(a)) = f(a) + a \cdot f(b) = f(a) + a \cdot f(a)$

ჩავსვათ $x=y \Rightarrow$

$f(x+x \cdot f(x)) = f(x) + x \cdot f(x) \Rightarrow f(a)+a \cdot f(a) = f(a+a \cdot f(a)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a+b \cdot f(a)) = f(a+a \cdot f(a))$

ჩავსვათ $x=b$ $\; y=a$.

$f(b+a \cdot f(b)) = f(b) + b \cdot f(a) = f(b) + b \cdot f(b) = f(b+b \cdot f(b))$

**შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი**

**შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის**

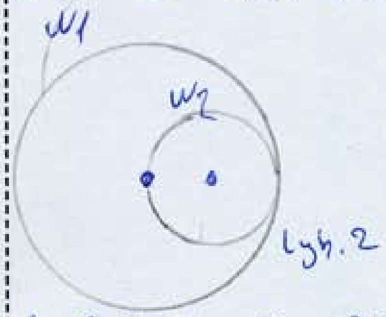
მაგიდა №

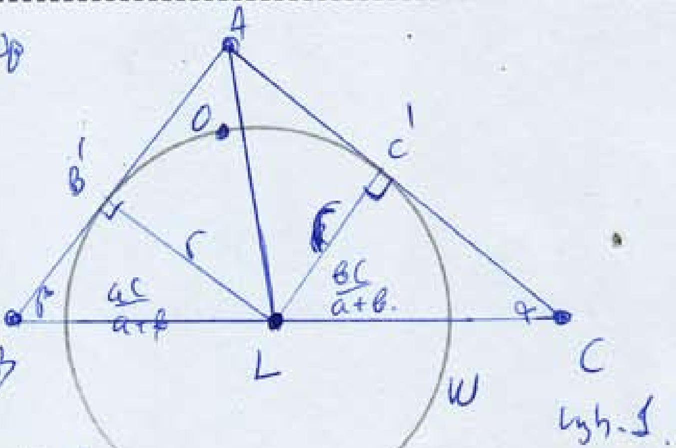
22.04.2012/ მათ/ II/ 177

ამოცანა № 5

გვერდი № 1.

განვიხილოთ ისეთი ორი წრეწირი [illegible]




ჩვენი [illegible] ნახ.2 $w_2$ [illegible] $w_1$-ის [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] $R = 2r$ [illegible] $R$ [illegible] $w$ [illegible] $w_1$-ის [illegible] $R > 2r$ [illegible] $R < 2r$. ანუ ჩვენი [illegible] (ნახ.1) [illegible] $w_1$-ის [illegible] 2-ზე [illegible] $\triangle ABC$-ს [illegible] $w$ [illegible] $BAC$-ს [illegible] ანუ $AL$ [illegible]. $AB \equiv a$ $AC \equiv b$ $BC \equiv c \Rightarrow$

$BL = \frac{ac}{a+b}$ $LC = \frac{bc}{a+b}$

ვთქვათ [illegible] $\angle ABC = \beta$ და $\angle ACB = \alpha$.

$2r = r + r = \frac{ac}{a+b}\cdot\sin\beta + \frac{bc}{a+b}\cdot\sin\alpha = \frac{c}{a+b}(a\sin\beta + b\sin\alpha)$ (*)

უდ $2r > R \Rightarrow$ უდ $8r > 4R$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R \Rightarrow a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ $b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

ჩავსვათ. ~~(*)~~ $\Rightarrow$ უტოლობა $\Rightarrow$

უდ $8r = \frac{4c}{a+b}(a\sin\beta + b\sin\alpha) > 2R + 2R = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a\sin\beta + b\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ ანუ უ.დ.

**შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი**

**შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის**

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 177

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

გაგრძელება:

ანუ კ-დ

$$\frac{4c}{a+b}\left(a\sin\beta + \cancel{b\sin\alpha}\right) > \frac{a\sin\beta \cdot \cancel{b\sin\alpha}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \Rightarrow 4c > \frac{a+b}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

ჩავსვათ a და b =>

$$4c > \left(\frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right) / \sin\alpha\cdot\sin\beta \Rightarrow 4\sin(\alpha+\beta) > \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

რაც სწორია $(\alpha, \beta \in (0; 90))$

ანუ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა რ.დ.გ.